

## ΜΑΘΗΜΑ 27

### 2.5 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

**Θεωρία – Σχόλια – Μέθοδοι**

**Ασκήσεις (Αναζητώ ρίζα)**

## ΘΕΩΡΙΑ

**1.**

### Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι :

- συνεχής σε κλειστό διάστημα  $[α, β]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό  $(α, β)$
- $f(α) = f(β)$

τότε υπάρχει  $ξ ∈ (α, β)$  τέτοιο, ώστε  $f'(ξ) = 0$

**2.**

### Άλλη έκφραση του συμπεράσματος του Θ. Rolle

« τότε υπάρχει ρίζα της εξίσωσης  $f'(x) = 0$  στο διάστημα  $(α, β)$  »

**3.**

### Γεωμετρική έκφραση του συμπεράσματος του Θ. Rolle

« τότε υπάρχει  $ξ ∈ (α, β)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $K(ξ, f(ξ))$  να είναι παράλληλη του άξονα  $x'x$ .

**4.**

### Θ.Μ.Τ

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι :

- συνεχής σε κλειστό διάστημα  $[α, β]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό  $(α, β)$

τότε υπάρχει  $ξ ∈ (α, β)$  τέτοιο, ώστε  $f'(ξ) = \frac{f(β) - f(α)}{β - α}$

5.

**Άλλη έκφραση του συμπεράσματος του Θ. Μ. Τ**

« τότε υπάρχει ρίζα της εξίσωσης  $f'(x) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$  στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  »

6.

**Γεωμετρική έκφραση του συμπεράσματος του Θ. Μ. Τ**

« τότε υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $K(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη της ευθείας  $AB$ , όπου  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$

## ΣΧΟΛΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

**Μια χρήσιμη πρόταση , συνέπεια του Θ. Rolle**

Μεταξύ δύο ριζών παραγωγίσιμης συνάρτησης υπάρχει ρίζα της παραγώγου της.

**Απόδειξη**

Έστω  $x_1, x_2$  (ας είναι  $x_1 < x_2$ ) δύο ρίζες της συνάρτησης  $f$ .

$f$  συνεχής στο  $[x_1, x_2]$

παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) = 0$

Άρα υπάρχει ρίζα της εξίσωσης  $f'(x) = 0$   
στο διάστημα  $(x_1, x_2)$

2.

**Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$** 

Δοκιμάζουμε τους παρακάτω τρόπους :

i) Προφανής ρίζα

ii) Bolzano

iii) Απαγωγή σε άτοπο (έστω  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x$ )

iv) Rolle σε παράγουσα της  $f$  (παράγουσα της  $f$  λέγεται συνάρτηση  $g$   
τέτοια , ώστε  $g'(x) = f(x)$ )

**3.**

**Για να αποδείξουμε ότι εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα**

Δοκιμάζουμε τους παρακάτω τρόπους :

i) Με το (2) αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μια ρίζα.

ii) Για τη μοναδικότητα δοκιμάζουμε α) Μονοτονία

β) Απαγωγή σε άτοπο και Rolle

**4.**

**Για να αποδείξουμε ότι εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει το πολύ μία ρίζα**

Απαγωγή σε άτοπο (έστω ότι έχει δύο) και στη συνέχεια Rolle.

**5.**

**Για να αποδείξουμε ότι εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει το πολύ δύο ρίζες**

Απαγωγή σε άτοπο (έστω ότι έχει τρεις) και στη συνέχεια δύο φορές Rolle .

**6.**

**Για να αποδείξουμε ότι εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει δύο ρίζες σε διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .**

Χωρίζουμε το διάστημα σε δύο κατάλληλα διαστήματα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\alpha \sin x + \beta \sin 2x + \gamma \sin 3x = 0$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

**Προτεινόμενη λύση**

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $\alpha \sin x + \beta \sin 2x + \gamma \sin 3x = 0$

Σχόλιο 2iv

Rolle στην παράγουσα

$$\alpha(\eta\mu x)' + \beta\left(\frac{1}{2}\eta\mu 2x\right)' + \gamma\left(\frac{1}{3}\eta\mu 3x\right)' = 0$$

$$\left(\alpha\eta\mu x + \beta\frac{1}{2}\eta\mu 2x + \gamma\frac{1}{3}\eta\mu 3x\right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = \alpha\eta\mu x + \beta\frac{1}{2}\eta\mu 2x + \gamma\frac{1}{3}\eta\mu 3x$ ,  $x \in [0, \pi]$ ,

οπότε αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $h'(x) = 0$ .

$h$  συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[0, \pi]$

$$h(0) = \alpha\eta\mu 0 + \beta\frac{1}{2}\eta\mu 0 + \gamma\frac{1}{3}\eta\mu 0 = \alpha \cdot 0 + \beta\frac{1}{2} \cdot 0 + \gamma\frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$h(\pi) = \alpha\eta\mu \pi + \beta\frac{1}{2}\eta\mu 2\pi + \gamma\frac{1}{3}\eta\mu 3\pi = \alpha \cdot 0 + \beta\frac{1}{2} \cdot 0 + \gamma\frac{1}{3} \cdot 0 = 0 = h(0)$$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $h'(x) = 0$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(0, \pi)$

2.

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και ισχύει  $f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  ώστε να ισχύει  $f'(\xi) = 2\xi$ .

**Προτεινόμενη λύση**

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $f'(x) - 2x = 0$  στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$

$$f'(x) - (x^2)' = 0$$

$$(f(x) - x^2)' = 0$$

Σχόλιο 2iv

Rolle στην παράγουσα

Πάμε για Rolle στη συνάρτηση  $h(x) = f(x) - x^2$

$h$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  σε διαφορά αντίστοιχων συναρτήσεων

$$h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha^2$$

$$h(\beta) = f(\beta) - \beta^2$$

$$\text{Η υπόθεση } f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow f(\alpha) - \alpha^2 = f(\beta) - \beta^2$$

$$\text{Άρα } h(\alpha) = h(\beta)$$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $h'(x) = 0$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$

3.

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[α, β]$  και παραγωγίσιμη στο  $(α, β)$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (α, β)$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (α, β)$  ώστε

$$\text{να ισχύει } \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$$

**Προτεινόμενη λύση**

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\alpha - x} + \frac{1}{\beta - x}$  στο διάστημα  $(α, β)$

$$f'(x)(\alpha - x)(\beta - x) = f(x)(\beta - x) + f(x)(\alpha - x)$$

$$f'(x)(\alpha - x)(\beta - x) - f(x)(\beta - x) - f(x)(\alpha - x) = 0$$

$$f'(x)(\alpha - x)(\beta - x) + f(x)(\beta - x)(\alpha - x)' + f(x)(\alpha - x)(\beta - x)' = 0$$

$$(f(x)(\alpha - x)(\beta - x))' = 0$$

Πάμε για Rolle στη συνάρτηση  $h(x) = f(x)(\alpha - x)(\beta - x)$

Σχόλιο 2iv  
Rolle στην  
παράγουσα

$h$  συνεχής στο  $[α, β]$  και παραγωγίσιμη στο  $(α, β)$

στα γινόμενα αντίστοιχων συναρτήσεων

$$h(\alpha) = 0 = h(\beta)$$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $h'(x) = 0$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(α, β)$

4.

Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $[0, \pi]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, \pi)$ .  
Να αποδείξετε ότι :

i) εφαρμόζεται το Θ. Rolle για τη συνάρτηση  $g(x) = e^{-f(x)} \eta \mu x$  στο διάστημα  $[0, \pi]$

ii) η εξίσωση  $f'(x) = \sigma \varphi x$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

**Προτεινόμενη λύση**

i)

Η συνάρτηση  $e^{-f(x)}$  είναι συνεχής σα σύνθεση συνεχών, οπότε και η  $e^{-f(x)} \eta \mu x$  είναι συνεχής σαν γινόμενο συνεχών

Ομοίως, είναι παραγωγίσιμη.

$$g(0) = e^{-f(0)} \eta \mu 0 = e^{-f(0)} \cdot 0 = 0$$

$$g(\pi) = e^{-f(\pi)} \eta \mu \pi = e^{-f(\pi)} \cdot 0 = 0 = g(0)$$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $g'(x) = 0$  έχει ρίζα στο  $(0, \pi)$ . **(1)**

ii)

$$\begin{aligned} \text{Είναι } g'(x) &= (e^{-f(x)} \eta \mu x)' = (e^{-f(x)})' \eta \mu x + e^{-f(x)} (\eta \mu x)' \\ &= e^{-f(x)} (-f'(x)) \eta \mu x + e^{-f(x)} \sigma \upsilon \nu x \\ &= -e^{-f(x)} f'(x) \eta \mu x + e^{-f(x)} \sigma \upsilon \nu x \\ &= -e^{-f(x)} (f'(x) \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x) \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $f'(x) = \sigma \varphi x$

$$f'(x) = \frac{\sigma \upsilon \nu x}{\eta \mu x}$$

Προσαρμογή στο (i)

$$f'(x) \eta \mu x = \sigma \upsilon \nu x$$

$$f'(x) \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x = 0$$

$$-e^{-f(x)} (f'(x) \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$g'(x) = 0 \quad \text{που έχει ρίζα στο } (0, \pi), \text{ από την (1)}$$

5.

Οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $[a, b]$  και παραγωγίσιμες στο  $(a, b)$  με  $g(a) \neq g(b)$  και  $g'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  ώστε να ισχύει  $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

**Προτεινόμενη λύση**

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

$$f'(x) [g(b) - g(a)] = g'(x) [f(b) - f(a)]$$

$$f'(x) [g(b) - g(a)] - g'(x) [f(b) - f(a)] = 0$$

$$[f(x) [g(b) - g(a)] - g(x) [f(b) - f(a)]]' = 0$$

Οπότε, πάμε για Rolle στη συνάρτηση

$$H(x) = f(x) [g(b) - g(a)] - g(x) [f(b) - f(a)]$$

Η συνάρτηση  $H$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$  σε διαφορά συνεχών

Η συνάρτηση  $H$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  σε διαφορά παραγωγίσιμων

$$\text{και } H(a) = f(a) [g(b) - g(a)] - g(a) [f(b) - f(a)]$$

$$= f(a) g(b) - f(a) g(a) - g(a) f(b) + g(a) f(a)$$

$$= f(a) g(b) - g(a) f(b) \quad (1)$$

$$H(b) = f(b) [g(b) - g(a)] - g(b) [f(b) - f(a)]$$

$$= f(b) g(b) - f(b) g(a) - g(b) f(b) + g(b) f(a)$$

$$= -f(b) g(a) + g(b) f(a) \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow H(a) = H(b)$$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $H'(x) = 0$  έχει ρίζα στο  $(a, b)$

6.

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  ώστε να ισχύει  $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \varepsilon \phi \xi$ .

**Προτεινόμενη λύση**

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \varepsilon \phi x$  στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x}$$

$$f'(x) \sigma \upsilon \nu x = f(x) \eta \mu x$$

$$f'(x) \sigma \upsilon \nu x - f(x) \eta \mu x = 0$$

$$f'(x) \sigma \upsilon \nu x + f(x) (\sigma \upsilon \nu x)' = 0$$

$$(f(x) \sigma \upsilon \nu x)' = 0$$

Οπότε, πάμε για Rolle στη συνάρτηση  $h(x) = f(x) \sigma \upsilon \nu x$

$h$  παραγωγίσιμη στο  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  άρα και συνεχής

$$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sigma \upsilon \nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 = 0$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = h\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $h'(x) = 0$  έχει ρίζα στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



7.

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: [a, \beta] \rightarrow (0, +\infty)$  δίνεται ότι  $\ln f(\beta) - \ln f(a) = \beta - a$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = f(\xi)$

### Προτεινόμενη λύση

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $f'(x) = f(x)$  στο διάστημα  $(a, \beta)$

$$f'(x) - f(x) = 0$$

$$f'(x)e^x - f(x)e^x = 0$$

$$f'(x)e^x - f(x)(e^x)' = 0$$

$$\frac{f'(x)e^x - f(x)(e^x)'}{(e^x)^2} = 0$$

$$\left( \frac{f(x)}{e^x} \right)' = 0$$

Για τη διαφορά  $f'(x) - f(x)$ ,  
Πρέπει να θυμόμαστε  
αυτή την ενέργεια

Οπότε, πάμε για Rolle στη συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$

h παραγωγίσιμη στο  $[a, \beta]$  άρα και συνεχής

$$h(a) = \frac{f(a)}{e^a} \quad (1) \quad \text{και} \quad h(\beta) = \frac{f(\beta)}{e^\beta} \quad (2)$$

$$\text{Η υπόθεση } \ln f(\beta) - \ln f(a) = \beta - a \Rightarrow \ln \frac{f(\beta)}{f(a)} = \ln e^{\beta-a}$$

$$\frac{f(\beta)}{f(a)} = e^{\beta-a}$$

$$\frac{f(\beta)}{f(a)} = \frac{e^\beta}{e^a}$$

$$\frac{f(\beta)}{e^\beta} = \frac{f(a)}{e^a} \quad (3)$$

Από τις (1), (2), (3) συμπεραίνουμε  $h(a) = h(\beta)$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $h'(x) = 0$  έχει ρίζα στο  $(a, \beta)$ .

### Κι' ένας άλλος τρόπος

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $f'(x) = f(x)$  στο διάστημα  $(a, \beta)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 = 0$$

$$(\ln f(x))' - x' = 0$$

$$(\ln f(x) - x)' = 0$$

Rolle για τη συνάρτηση  $h(x) = \ln f(x) - x$  κ. λ. π

**8.**

Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

i) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι “1-1”.

ii) Αν η  $C_f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 2011)$  και  $B(-3, 1)$ , να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(-2010 + f(x^2 - 3)) = -3$

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της  $C_f$  παράλληλη στην ευθεία

$$y = \frac{1005}{2}x + 1005$$

**Προτεινόμενη λύση**

i)

Έστω ότι η  $f$  δεν είναι “1-1”.

Θα υπάρχουν  $x_1 \neq x_2$  ώστε  $f(x_1) = f(x_2)$

Rolle στο διάστημα  $[x_1, x_2] \Rightarrow$  υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  ώστε  $f'(\xi) = 0$  που είναι άτοπο.

ii)

$$A \in C_f \Rightarrow f(1) = 2011$$

$$B \in C_f \Rightarrow f(-3) = 1$$

$f$  είναι “1-1”  $\Rightarrow$  υπάρχει η συνάρτηση  $f^{-1}$

$$f^{-1}(-2010 + f(x^2 - 3)) = -3 \Leftrightarrow -2010 + f(x^2 - 3) = f(-3)$$

$$-2010 + f(x^2 - 3) = 1$$

$$f(x^2 - 3) = 2011$$

$$f(x^2 - 3) = f(1)$$

$$x^2 - 3 = 1$$

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

iii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει  $x_0$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = \frac{1005}{2}$ .

Αναζητάμε, λοιπόν, ρίζα της εξίσωσης  $f'(x) = \frac{1005}{2}$

$$2f'(x) = 1005$$

$$2f'(x) - 1005 = 0$$

$$(2f(x) - 1005x)' = 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε  $h(x) = 2f(x) - 1005x$

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[-3, 1]$  σα διαφορά αντίστοιχων συναρτήσεων παραγωγίσιμη στο  $(-3, 1)$  » »

$$h(-3) = 2f(-3) - 1005(-3) = 2 \cdot 1 + 3015 = 3017$$

$$h(1) = 2f(1) - 1005 \cdot 1 = 2 \cdot 2011 - 1005 = 4022 - 1005 = 3017 = h(-3)$$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $h'(x) = 0$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(-3, 1)$

Από την (1), η εξίσωση  $(2f(x) - 1005x)' = 0$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(-3, 1)$

Απαγωγή σε άτοπο

**9.**

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και παραγωγίσιμη στο  $(α, β)$  με  $f(α) = β$  και  $f(β) = α$  και  $0 < α < β$ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (α, β)$  ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $K(x_0, f(x_0))$  να διέρχεται από το  $\Lambda(α + β, 0)$ .

### Προτεινόμενη λύση

Η εφαπτομένη  $\varepsilon$  στο  $K$  θα έχει εξίσωση  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ .

Για να διέρχεται από  $\Lambda(α + β, 0)$ , θα πρέπει να ισχύει

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(α + β - x_0)$$

$$-f(x_0) = f'(x_0)(α + β - x_0)$$

Αναζητάμε, λοιπόν, ρίζα της εξίσωσης  $-f(x) = f'(x)(α + β - x)$

$$(α + β - x)' f(x) = f'(x)(α + β - x)$$

$$f'(x)(α + β - x) - (α + β - x)' f(x) = 0$$

$$\frac{f'(x)(α + β - x) - (α + β - x)' f(x)}{(α + β - x)^2} = 0$$

$$\left( \frac{f(x)}{α + β - x} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(x)}{α + β - x}$ ,  $x \in [α, β]$

Οπότε, αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $h'(x) = 0$

Είναι  $h$  συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $[α, β]$  σα λόγος αντίστοιχων συναρτήσεων

$$h(α) = \frac{f(α)}{α + β - α} = \frac{f(α)}{β} = \frac{β}{β} = 1$$

$$h(β) = \frac{f(β)}{α + β - β} = \frac{f(β)}{α} = \frac{α}{α} = 1$$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $h'(x) = 0$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(α, β)$

**10.**

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  ισχύει  $f(x) > 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε

$$f(\beta) \cdot e^{(\alpha-\beta) \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} = f(\alpha)$$

**Προτεινόμενη λύση**

$$f(\beta) \cdot e^{(\alpha-\beta) \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} = f(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad e^{(\alpha-\beta) \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} = \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$$

$$\ln e^{(\alpha-\beta) \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} = \ln \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$$

$$(\alpha - \beta) \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \ln f(\alpha) - \ln f(\beta)$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta - \alpha}$  στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$

$$(\ln f(x))' = \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Πάμε για Θ.Μ.Τ στη συνάρτηση  $h(x) = \ln f(x)$  στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$

Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  σα σύνθεση συνεχών

και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  σα σύνθεση παραγωγίσιμων

Άρα υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $h'(\xi) = \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

$$(\ln f(\xi))' = \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

**11.**

Έστω συνάρτηση  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^*$  δύο φορές παραγωγίσιμη και  $f'(a)f(b) = f(a)f'(b)$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο, ώστε  $[f'(\xi)]^2 = f(\xi)f''(\xi)$

**Προτεινόμενη λύση**

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $[f'(x)]^2 = f(x)f''(x)$  στο διάστημα  $[a, b]$

$$f'(x)f'(x) = f(x)f''(x)$$

$$f(x)f''(x) - f'(x)f'(x) = 0$$

$$(f'(x))'f(x) - f'(x)f'(x) = 0$$

$$\frac{(f'(x))'f(x) - f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = 0$$

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 0$$

Πάμε για Θ. Rolle στη συνάρτηση  $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$  στο διάστημα  $[a, b]$

Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$  σα λόγος συνεχών, και είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  σα λόγος παραγωγίσιμων.

$$h(a) = \frac{f'(a)}{f(a)} \quad (1) \quad \text{και} \quad h(b) = \frac{f'(b)}{f(b)} \quad (2)$$

$$\text{Η υπόθεση } f'(a)f(b) = f(a)f'(b) \Rightarrow \frac{f'(a)}{f(a)} = \frac{f'(b)}{f(b)} \quad (3)$$

$$\text{Από τις (1), (2), (3)} \Rightarrow h(a) = h(b)$$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $h'(x) = 0$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(a, b)$

**12.**

Οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα  $[a, b]$  με

$f(a) = f(b) = 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο ,

ώστε  $f'(\xi) = f(\xi) \cdot g'(\xi)$

**Προτεινόμενη λύση**

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $f'(x) = f(x) \cdot g'(x)$  στο διάστημα  $[a, b]$

$$f'(x) - f(x) \cdot g'(x) = 0$$

Μια δύσκολη ενέργεια

$$f'(x) e^{-g(x)} - f(x) \cdot e^{-g(x)} g'(x) = 0$$

$$f'(x) e^{-g(x)} + f(x) \cdot (e^{-g(x)})' = 0$$

$$(f(x) e^{-g(x)})' = 0$$

Πάμε για Θ. Rolle στη συνάρτηση  $h(x) = f(x) e^{-g(x)}$  στο διάστημα  $[a, b]$

Η συνάρτηση  $h$  είναι παραγωγίσιμη , άρα και συνεχής στο  $[a, b]$  στα γινόμενα αντίστοιχων συναρτήσεων

$$h(a) = f(a) e^{-g(a)} = 0 \cdot e^{-g(a)} = 0 \quad \text{και}$$

$$h(b) = f(b) e^{-g(b)} = 0 \cdot e^{-g(b)} = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad h(a) = h(b)$$

**13.**

Η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[a, b]$  και ισχύει  $f'(a) = f'(b) = 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο, ώστε  $f''(\xi) = [f'(\xi)]^2$

**Προτεινόμενη λύση**

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $f''(x) = [f'(x)]^2$  στο διάστημα  $[a, b]$

$$f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$$

$$f''(x) e^{-f(x)} - [f'(x)]^2 e^{-f(x)} = 0$$

$$(f'(x))' e^{-f(x)} + f'(x) (e^{-f(x)})' = 0$$

$$(f'(x) e^{-f(x)})' = 0$$

Πάμε για Θ. Rolle στη συνάρτηση  $h(x) = f'(x) e^{-f(x)}$  στο διάστημα  $[a, b]$

Η συνάρτηση  $h$  είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο  $[a, b]$  στα γινόμενα αντίστοιχων συναρτήσεων

$$h(a) = f'(a) e^{-f(a)} = 0 \cdot e^{-f(a)} = 0 \quad \text{και}$$

$$h(b) = f'(b) e^{-f(b)} = 0 \cdot e^{-f(b)} = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad h(a) = h(b)$$

Rolle  $\Rightarrow$  η  $h$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(a, b)$

**14.**

Συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και η εξίσωση  $e^x f(x) = 1$  έχει ρίζες τους αριθμούς  $0, 1, 2$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $e^x f''(x) = 1$  έχει πραγματική ρίζα στο διάστημα  $(0, 2)$ .

**Προτεινόμενη λύση**

$$O \ 0 \text{ ρίζα της εξίσωσης } e^x f(x) = 1 \Rightarrow e^0 f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$O \ 1 \text{ ρίζα της εξίσωσης } e^x f(x) = 1 \Rightarrow e^1 f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = e^{-1}$$

$$O \ 2 \text{ ρίζα της εξίσωσης } e^x f(x) = 1 \Rightarrow e^2 f(2) = 1 \Rightarrow f(2) = e^{-2}$$

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $e^x f''(x) = 1$  στο διάστημα  $(0, 2)$ .

$$f''(x) = e^{-x}$$

$$f''(x) = e^{-x}$$

$$f''(x) - e^{-x} = 0$$

$$(f'(x))' + (e^{-x})' = 0$$

$$(f'(x) + e^{-x})' = 0$$

$$(f'(x) - (e^{-x})')' = 0$$

$$(f(x) - e^{-x})'' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) - e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Οπότε, αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $h''(x) = 0$  στο  $(0, 1] \cup [1, 2)$ .

$h$  συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$

$$h(0) = f(0) - e^{-0} = 1 - 1 = 0$$

$$h(1) = f(1) - e^{-1} = e^{-1} - e^{-1} = 0 \quad \text{Δηλαδή } h(0) = h(1)$$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $h'(x) = 0$  έχει ρίζα  $\xi_1 \in (0, 1)$

Ομοίως, η εξίσωση  $h'(x) = 0$  έχει ρίζα  $\xi_2 \in (1, 2)$

$h'$  συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $[\xi_1, \xi_2]$

$$h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = 0$$

Rolle  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $h''(x) = 0$  έχει ρίζα  $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$

Μεταξύ δύο ριζών  
συνάρτησης υπάρχει  
ρίζα της παραγώγου  
της



**15.**

Συνάρτηση  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και ισχύουν  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 1$ . Να αποδείξετε ότι

i) υπάρχει  $\xi_1 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_1) = 1$

ii) υπάρχει  $\xi_2 \in (1, 2)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_2) = 0$

iii) υπάρχει  $\xi_3 \in (0, 2)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_3) = \frac{1}{4}$

iv) αν η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε υπάρχει  $\xi \in (0, 2)$  τέτοιο, ώστε  $f''(\xi) < 0$ .

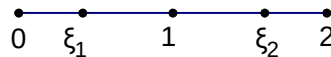
### Προτεινόμενη λύση

i)

$f$  συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$ , με Θ.Μ.Τ  $\Rightarrow$

υπάρχει  $\xi_1 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1} = 1$

ii)



$f$  συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $[1, 2]$ , με Θ.Μ.Τ  $\Rightarrow$

υπάρχει  $\xi_2 \in (1, 2)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 1}{1} = 0$

iii)

Επειδή είναι  $f'(\xi_2) = 0$ ,  $f'(\xi_1) = 1$  και  $f'$  συνεχής, το σύνολο τιμών της  $f'$  θα είναι τουλάχιστον το διάστημα  $[0, 1]$ .

Και επειδή  $\frac{1}{4} \in (0, 1)$ , κατά το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, θα υπάρχει

$\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$ , άρα και στο  $(0, 2)$  ώστε να ισχύει  $f'(\xi_3) = \frac{1}{4}$ .

iv)

Επειδή  $f'$  συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[\xi_1, \xi_3]$ , κατά το Θ.Μ.Τ,

θα υπάρχει  $\xi \in (\xi_1, \xi_3)$ , άρα και στο  $(0, 2)$ , ώστε να ισχύει

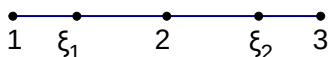
$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_3) - f'(\xi_1)}{\xi_3 - \xi_1} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\xi_3 - \xi_1} = \frac{-\frac{3}{4}}{\xi_3 - \xi_1} < 0, \text{ αφού } \xi_3 - \xi_1 > 0$$

**16.**

Έστω συνάρτηση  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[1, 3]$ .

Αν ισχύει  $2f(2) = f(1) + f(3)$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (1, 3)$

τέτοιο, ώστε  $f''(\xi) = 0$

**Προτεινόμενη λύση**

Σχόλιο 6

$f$  παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο  $[1, 2]$ , οπότε, από Θ.Μ.Τ

$$\text{υπάρχει } \xi_1 \in (1, 2) \text{ ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) \quad (1)$$

$f$  παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο  $[2, 3]$ , οπότε, από Θ.Μ.Τ

$$\text{υπάρχει } \xi_2 \in (2, 3) \text{ ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2) \quad (2)$$

$$\text{Η υπόθεση } 2f(2) = f(1) + f(3) \Rightarrow f(2) - f(1) = f(3) - f(2),$$

οπότε, από τις (1), (2) συμπεραίνουμε  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

Επειδή, όμως,  $f'$  παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο  $[1, 3]$ , άρα και στο  $[\xi_1, \xi_2]$ ,

με Rolle συμπεραίνουμε ότι υπάρχει  $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ , άρα και  $\xi \in (1, 3)$  τέτοιο,

ώστε  $f''(\xi) = 0$

**17.**

Έστω συνάρτηση  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[a, \beta]$  και

$\gamma \in (a, \beta)$ . Αν οι αριθμοί  $a, \gamma, \beta$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, όπως

επίσης και οι αριθμοί  $f(a), f(\gamma), f(\beta)$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$

τέτοιο, ώστε  $f''(\xi) = 0$

**Υπόδειξη**

Ακολουθήσε την άσκηση 16

**18.**

Έστω συνάρτηση  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[1, e]$  και ισχύει

$$f(1) = 1, f(2) = 4 - \ln 2, f(e) = e^2 - 1. \text{ Να αποδείξετε ότι υπάρχει } \xi \in (1, e)$$

τέτοιο, ώστε  $f''(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + 2$

**Προτεινόμενη λύση**

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $f''(x) = \frac{1}{x^2} + 2$  στο διάστημα  $[1, e]$

$$f''(x) - \frac{1}{x^2} - 2 = 0$$

$$(f'(x))' + \left(\frac{1}{x}\right)' - (2x)' = 0$$

$$(f'(x) + \frac{1}{x} - 2x)' = 0$$

$$(f'(x) + (\ln x)' - (x^2)')' = 0$$

$$(f(x) + \ln x - x^2)'' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) + \ln x - x^2$ ,  $x \in [1, e]$

Οπότε, Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $h''(x) = 0$  στο διάστημα  $[1, e]$

$h$  παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο  $[1, 2]$  σαν άθροισμα παραγωγίσιμων

Θ.Μ.Τ  $\Rightarrow$  υπάρχει  $\xi_1 \in (1, 2)$  ώστε

$$\begin{aligned} h'(\xi_1) &= \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = [f(2) + \ln 2 - 2^2] - [f(1) + \ln 1 - 1^2] \\ &= [4 - \ln 2 + \ln 2 - 4] - [1 + 0 - 1] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$h$  παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο  $[2, e]$  σαν άθροισμα παραγωγίσιμων

Θ.Μ.Τ  $\Rightarrow$  υπάρχει  $\xi_2 \in (2, e)$  ώστε

$$\begin{aligned} h'(\xi_2) &= \frac{h(e) - h(2)}{e - 2} = \frac{1}{e - 2} [[f(e) + \ln e - e^2] - [f(2) + \ln 2 - 2^2]] \\ &= \frac{1}{e - 2} [e^2 - 1 + 1 - e^2] - [4 - \ln 2 + \ln 2 - 4] = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$h'$  παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο  $[\xi_1, \xi_2]$  σαν άθροισμα παραγωγίσιμων

και από (1), (2) έχουμε  $h'(\xi_1) = h'(\xi_2)$ , οπότε με θεώρημα Rolle στο  $[\xi_1, \xi_2]$ ,

υπάρχει ρίζα της εξίσωσης  $h''(x) = 0$  στο  $(\xi_1, \xi_2)$ , άρα και στο  $(1, e)$

**19.**

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^4 + ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  ,  $a > 0$  το πολύ δύο πραγματικές ρίζες μπορεί να έχει .

**Προτεινόμενη Λύση**

Έστω ότι η εξίσωση έχει τρεις ρίζες  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  με  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$  τότε σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $[\rho_1, \rho_2]$  ,  $[\rho_2, \rho_3]$

εύκολα αποδεικνύεται ότι για την συνάρτηση

$$f(x) = x^4 + ax^2 + \beta x + \gamma \text{ ισχύει το θ. Rolle .}$$

Συνεπώς θα υπάρχουν  $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$  και  $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$  έτσι ώστε

$$f'(\xi_1) = 0 \text{ και } f'(\xi_2) = 0$$

Τώρα

Η συνάρτηση  $f'(x) = 4x^3 + 2ax + \beta$  είναι φανερό ότι ικανοποιεί το θ. Rolle , στο  $[\xi_1, \xi_2]$  οπότε θα υπάρχει ένα  $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$  έτσι ώστε  $f''(x_0) = 0$  δηλαδή

$$12x_0^2 + 2a = 0 \text{ πράγμα άτοπο αφού } a > 0 .$$

Επομένως η αρχική εξίσωση δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δύο ρίζες .

Σχόλιο 5

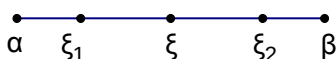
**20.**

Συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[a, \beta]$  με  $f(a) > f(\beta)$ ,  $f'(a) > 0$  και  $f'(\beta) > 0$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f''(x) = 0$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(a, \beta)$ .

**Προτεινόμενη λύση**

$f$  παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, στο  $[a, \beta]$

Θ.Μ.Τ  $\Rightarrow$  υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$  ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} < 0$  αφού ο αριθμητής είναι αρνητικός και ο παρονομαστής θετικός.



$f'$  συνεχής στο  $[a, \xi]$  και  $f'(a) f'(\xi) < 0$ , κατά Bolzano υπάρχει  $\xi_1 \in (a, \xi)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_1) = 0$

Ομοίως, υπάρχει  $\xi_2 \in (\xi, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_2) = 0$

Rolle για την  $f'$  στο διάστημα  $(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow$

η εξίσωση  $f''(x) = 0$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(\xi_1, \xi_2)$ , άρα και στο  $(a, \beta)$ .

Σχόλιο 6